

«Неопределённый интеграл»

Функция $F(x)$ называется *первообразной* функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если для любого $x \in (a;b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Если функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $(a;b)$, то множество всех первообразных для $f(x)$ задается формулой $F(x) + C$, где $C = \text{const}$.

Множество всех первообразных функций $F(x) + C$ для $f(x)$ называется *неопределённым интегралом от функции $f(x)$* и обозначается символом $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Здесь $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования*, $\int$ – *знаком неопределённого интеграла*.

Операция нахождения неопределённого интеграла от функции называется *интегрированием* этой функции.

Геометрически неопределённый интеграл представляет собой семейство «параллельных» кривых $y = F(x) + C$ (каждому числовому значению C соответствует определенная кривая семейства). График каждой первообразной (кривой) называется *интегральной кривой*.

Свойства неопределённого интеграла:

1. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$; $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
2. $\int dF(x) = F(x) + C$;
3. $\int a f(x)dx = a \cdot \int f(x)dx$, $a \neq 0$;
4. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$;
5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то и $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u = \varphi(x)$ – произвольная функция, имеющая непрерывную производную.

Метод подстановки.

Метод интегрирования подстановкой заключается во введении новой переменной интегрирования (т.е. подстановки). При этом заданный интеграл сводится к новому интегралу, который является табличным или к нему сводящимся.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$. Сделаем подстановку $x = \varphi(t)$, где $\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную.

Формула интегрирования подстановкой:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

После нахождения интеграла правой части этого равенства следует перейти от новой переменной интегрирования t назад к переменной x .

Таблица основных интегралов

1. $\int dx = x + C;$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C;$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
7. $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C;$
9. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C;$
11. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
13. $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \operatorname{tg} ax + C$
15. $\int e^x dx = e^x + C;$
17. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C;$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$
21. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$
23. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C;$
2. $\int adx = ax + C;$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
8. $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C;$
10. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C;$
12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$
14. $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} \operatorname{ctg} ax + C;$
16. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, (a > 0);$
18. $\int u^{ax} dx = \frac{u^{ax}}{a \ln u} + C, (u > 0);$
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$
22. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$
24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C.$

Таблица основных производных:

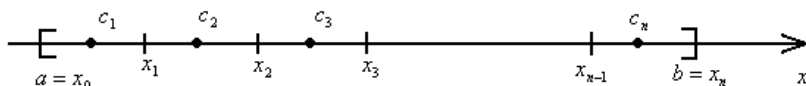
- $$(c)' = 0, \text{ где } c - \text{const}$$
- $$(u \pm v)' = u' \pm v'$$
- $$(uv)' = u'v + uv'$$
- $$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
- $$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$
- $$(e^x)' = e^x$$
- $$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$
- $$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$
- $$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$
- $$(\sin x)' = \cos x$$
- $$(\cos x)' = -\sin x$$
- $$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
- $$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$
- $$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
- $$(cu)' = c \cdot u', \text{ где } c - \text{const}$$
- $$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
- $$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$$
- $$(u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$$
- $$(e^u)' = e^u \cdot u'$$
- $$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$$
- $$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$
- $$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$$
- $$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$$
- $$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$
- $$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$
- $$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$$
- $$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

Определенный интеграл

Мощным средством исследования в математике, физике, механике и других дисциплинах является определенный интеграл – одно из основных понятий математического анализа. Вычисление площадей, ограниченных кривыми, длин дуг, объемов, работы, скорости, пути, моментов инерции и т.д. сводится к вычислению определенных интегралов.

I. Понятие определённого интеграла.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$, $a < b$. Выполним следующие действия:



1) С помощью точек $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ ($x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$) разобьем отрезок $[a; b]$ на n частичных отрезков: $[x_0; x_1], [x_1; x_2], \dots, [x_{n-1}; x_n]$. Длину i -го частичного отрезка обозначим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

2) В каждом частичном отрезке Δx_i ($i = \overline{1, n}$) выберем произвольную точку $c_i \in \Delta x_i$ и вычислим значения функции в ней, т.е. $f(c_i)$.

3) Умножим найденное значение функции $f(c_i)$ на длину Δx_i : $f(c_i) \cdot \Delta x_i$.

4) Составим сумму S_n всех таких произведений:

$$S_n = f(c_1) \cdot \Delta x_1 + f(c_2) \cdot \Delta x_2 + \dots + f(c_n) \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i.$$

Сумма такого вида называется *интегральной суммой* функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ (она, вообще говоря, зависит и от n , и от, и от c_i).

Устремим $n \rightarrow \infty$, при этом $\Delta x_i \rightarrow 0$. Найдем при этом предел интегральных сумм:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i.$$

Если интегральная сумма S_n имеет предел, который не зависит от способа разбиения $[a; b]$ на частичном отрезке, ни от выбора точек в них, то этот предел и называется *определенным интегралом* от функции $y = f(x)$ на $[a; b]$ и обозначается $\int_a^b f(x) dx$.

Определение: *Определенным интегралом* от функции $y = f(x)$ на $[a; b]$ называется предел интегральных сумм (если он существует): $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Числа a и b называются соответственно *нижним* и *верхним пределами интегрирования*, $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, $f(x) dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования*, отрезок $[a; b]$ – *отрезком интегрирования*.

Функция $y = f(x)$ для которой на $[a; b]$ существует определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$, называется *интегрируемой* на этом отрезке.

Сформулируем теорему существования определенного интеграла:

Теорема (Коши): Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ существует.

Отметим, что непрерывность функции является достаточным условием ее интегрируемости. Однако определенный интеграл может существовать и для некоторых разрывных функций (т.е. необходимым условием непрерывность не является), в частности для всякой ограниченной на

отрезке функции, имеющей на нем конечное число точек разрыва, существует интеграл (т.е. необходимым условием непрерывности является ограниченность функции).

Из определения определенного интеграла непосредственно вытекают следующие утверждения (свойства):

1) Определенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz$$
 (это следует из того, что интегральная сумма и ее предел не зависят от того, какой буквой обозначается аргумента данной функции).

2) Определенный интеграл с одинаковыми пределами интегрирования равен нулю: $\int_a^a f(x)dx = 0$
 (т.к. $\Delta x_i = 0$).

3) Для любого действительного числа c : $\int_a^b cdx = c \cdot (b - a)$.

II. Формула Ньютона-Лейбница.

Вычисление определенных интегралов методом, основанном на определении его как предела интегральных сумм, как правило, связано с большими трудностями. Существует более удобный метод вычисления определенного интеграла. Рассмотрим его.

Пусть функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a; b]$.

Теорема: Если функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и $F(x)$ – какая-либо ее первообразная на $[a; b]$ (т.е. $F'(x) = f(x)$), то имеет место формула $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

– это равенство называется *формулой Ньютона-Лейбница* (Название условно, поскольку ни у Ньютона, ни у Лейбница не было такой формулы в точном смысле этого слова. Но важно, что именно они впервые установили связь между интегрированием и дифференцированием, позволяющую создать правило для вычисления определенного интеграла).

Можно ввести обозначение: $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$, тогда формула Ньютона-Лейбница примет вид:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Эта формула дает удобный способ вычисления определенного интеграла. Чтобы вычислить определенный интеграл от непрерывной функции $f(x)$ на $[a; b]$. Надо найти ее первообразную $F(x)$ и подставить значение в концах отрезка (т.е. задача вычисления определенного интеграла сводится вообще говоря к более легкой задаче: вычислению неопределенного интеграла (она достаточно хорошо изучена)).

Примеры.

$$1) \int_0^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^3 = 9 - 0 = 9.$$

$$2) \int_{-2}^2 \frac{dx}{4+x^2} = \frac{1}{2} \arctg \frac{x}{2} \Big|_{-2}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) = \frac{\pi}{4}.$$

III. Свойства определённого интеграла.

Рассмотрим основные свойства определённого интеграла, считая подынтегральную функцию интегрируемой на. При выводе свойств используется определение интеграла или формула Ньютона-Лейбница.

В вопросе 1 свойства 1 и 2 тоже можно обосновать формулой Ньютона-Лейбница.

1) При перестановке верхнего и нижнего пределов интегрирования интеграл меняет свой знак на противоположный $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Доказательство: $\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = -\int_a^b f(x)dx$.

Например, $\int_1^0 x^3 dx = -\int_0^1 x^3 dx$.

2) Постоянный множитель можно выносить за знак определённого интеграла $\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx$.

Например, $\int_0^1 3e^x dx = 3 \int_0^1 e^x dx$.

3) Определённый интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен сумме определённых интегралов от этих функций: $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$.

4) Если промежуток интегрирования $[a; b]$ разбит на конечное число частичных отрезков, то интеграл по всему отрезку равен сумме интегралов по частям этого отрезка (свойство аддитивности): $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, если $a < c < b$.

5) «Теорема о среднем». Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то существует точка $c \in [a; b]$, такая что $\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a)$

Это свойство имеет простой геометрический смысл: значение определённого интеграла равно при некотором $c \in (a; b)$ площади прямоугольника с высотой $f(c)$ и основанием $b - a$. Число

$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ называется *средним значением* функции $f(x)$ на $[a; b]$.

6) Если функция $f(x)$ сохраняет знак на $[a; b]$ (где $a < b$), то интеграл имеет тот же знак, что и функция: т.е. $f(x) \geq 0 \Rightarrow$.

7) неравенство между непрерывными функциями на $[a; b]$ (где $a < b$) можно интегрировать, т.е. если $f(x) \leq g(x)$, то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ (отметим, что дифференцировать неравенства нельзя).

8) $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$, $a < b$.

IV. Методы вычисления определённого интеграла.

Рассмотрим методы вычисления определённого интеграла. Простым и удобным методом является формула Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Применяется этот метод во всех случаях, когда может быть найдена первообразная функция $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$.

Например, $\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -(\cos \pi - \cos 0) = -(-1 - 1) = 2.$

$$\int_0^2 (3x^2 - 1) dx = \left(x^3 - x \right) \Big|_0^2 = (2^3 - 2) - (0^3 - 0) = 6.$$

При вычислении определенного интеграла широко используется и метод замены переменной.

Пусть для вычисления интеграла $\int_a^b f(x) dx$ от непрерывной функции сделан подстановка.

Теорема. Если: 1) функция $x = \varphi(t)$ и ее производная $x' = \varphi'(t)$ непрерывны при $t \in [\alpha; \beta]$; 2) множеством значений функции $x = \varphi(t)$ при $t \in [\alpha; \beta]$ является отрезок $[a; b]$; 3) $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (1)$$

Формула (1) называется *формулой замены переменной или подстановки* в определенном интеграле.

Отметим, что:

1) при вычислении определенного интеграла методом подстановки возвращаться к первоначальной переменной не требуется, т.к. следует менять пределы интегрирования при замене переменных;

2) часто вместо подстановки $x = \varphi(t)$ применяют подстановку $t = g(x)$.