Введение

Теория вероятностей возникла в XVII веке (в работах Паскаля, Ферма, Бернулли), причем ее первоначальное развитие связано с исследованием азартных игр (анализ ситуаций, выдача рекомендаций игрокам в кости, карты, рулетку – предсказывался результат с большей или меньшей вероятностью). Никакая наука, в том числе и математика не претендует на то, чтобы делать какие-либо предсказания относительно исхода одного эксперимента.

I. Предмет теории вероятностей.

Изучать случайное событие можно только тогда, когда есть возможность повторять опыт многократно и фиксировать его результаты.

Затем ТВ превращается в науку, которая получила весьма серьезное применение в самых различных областях науки и техники. Возникает теория случайных процессов, основы которой заложил русский математик Марков. В конце XIX – начале XX в.в. создается математическая статистика. На современном этапе приемы и методы статистики широко используются, например, при анализе деятельности пожарной охраны (как оперативно-тактической, так и профилактической), при анализе ее кадрового потенциала, проведении различных социологических исследований в ПО и т.д. Одной из дисциплин, наиболее тесно связанной со статистикой является ТВ, которая позволяет построить математические модели процесса функционирования ПО.

В биологии и медицине ТВ применяется для обработки результатов экспериментов. В последнее время наметились возможности применения ТВ в вопросах, связанных с неврологической деятельностью, в вопросах наследственности. ТВ может быть применена при решении многих военных задач.

В своей практической деятельности мы часто встречаемся с явлениями, исход которых невозможно предсказать, результат которых зависит от случая.

Например, при стрельбе из пистолета (автомата) заранее никогда нельзя предсказать, сколько очков выбьет тот или иной стрелок при выстреле. Более того, не всегда можно предсказать попадет стреляющий в мишень или нет, т.е. каждый выстрел (попадание в цель или промах) – *случайное событие*.

Однако если взять отдельного стрелка, и дать ему возможность выполнить, допустим, 100 выстрелов, и если при этом у него в среднем 80 попаданий (значит около 20 неудачных). При повторении стрельб в тех же условиях у него может быть и 81 и 82 и 79 и 78 попаданий, иногда их число может оказаться заметно больше или заметно меньше, чем 80. Вместе с тем при многократном повторении стрельбы число попаданий будет стремиться к некоторой константе.

Определение ТВ: теория вероятностей изучает закономерности массово-случайных явлений (т.е. заранее их нельзя предсказать точно, поэтому обязательно должны явления (опыты) многократно повторяться, а результаты фиксировать, только тогда можно сделать какие-то выводы).

Таким образом, *«Теория вероятностей»* есть раздел математики, в котором изучаются случайные явления (события) и выявляются закономерности при массовом их повторении. Для того, чтобы записывать и исследовать эти закономерности, введем некоторые основные понятия и определения.

Предмет теории вероятностей

Всякое действие, явление, реализуемое при определенном комплексе условий называют **испытанием**.

Результат испытания называют **событием**.

Пример. Брошена монета – испытание;

Появление герба – событие;

События обозначают заглавными буквами латинского алфавита: A, B, …

Наблюдаемые нами события можно подразделить на следующие три вида:

- Достоверные;
- Невозможные;
- Случайные;

Достоверным называют событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий S.

Невозможным называют событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий S.

Случайным называют событие, которое при осуществлении совокупности условий S может либо произойти, либо не произойти.

Пример. Брошена игральная кость – испытание;

Выпадение 4-х очков – событие; *какое?* - случайное;

Выпадение не больше 6-и очков - событие; *какое?* – достоверное;

Выпадение 10-и очков - событие; *какое?* – невозможное.

Каждое случайное событие, в частности – выпадение герба, есть следствие действия очень многих случайных причин (сила, с которой брошена монета, форма монеты, сплав, из которого она сделана и др.). Невозможно учесть влияние на результат всех этих причин, поскольку число их очень велико и законы их действия неизвестны. Поэтому теория вероятностей не ставит перед собой задачу предсказать, произойдет единичное событие или нет, - она просто не в силах это сделать.

По-иному обстоит дело, если рассматриваются случайные события, которые могут многократно наблюдаться при осуществлении одних и тех же условий S, т.е. если речь идет о массовых однородных случайных событиях. Оказывается, что достаточно большое число однородных случайных событий, независимо от их конкретной природы, подчиняется определенным закономерностям, а именно – вероятностным закономерностям. Установлением этих закономерностей и занимается теория вероятностей.

Примеры:

Опыт	Случайные события в этом опыте
Подбрасывание монеты	A – «выпал орел» B – «выпала решка»
Выстрел по цели	A – попадание в цель B – промах
Подбрасывание игральной кости	A – выпало 5 очков B – выпало 6 очков C – выпало четное число очков
Вынимание карты из колоды	A – появление туза и т.д.

Обозначаются случайные события заглавными латинскими буквами:

($A, B, C, D, \ldots, A_1, A_2$).

Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий.

Знание закономерностей, которым подчиняются массовые случайные события, позволяет предвидеть, как эти события будут протекать.

Например, нельзя наперед определить результат одного бросания монеты, но можно предсказать, причем с небольшой погрешностью, число появлений герба, если монета будет брошена достаточно большое число раз. При этом предполагается, конечно, что монета бросается в одних и тех же условиях.

Например, то, что застрахованный объект (дом, домашнее имущество и т.п.) будет уничтожен в результате стихийного бедствия, - дело случая, Чем же тогда страховые органы руководствуются в своей работе? Оказывается, что если о будущем определенного застрахованного объекта сказать ничего нельзя, то о состоянии большого их числа можно почти наверняка сказать многое.

Виды случайных событий

События называют **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Пример. Монета брошена 1 раз. События: А – выпал герб и В – выпала решка несовместные.

Брошена игральная кость. События: А – выпала 1, В – выпала 2, С – выпала 3 несовместные.

События называют **совместными**, если появление одного из них не исключает появление других событий в одном и том же испытании.

Пример. Брошена игральная кость. События: А – выпала 4, событие В – выпало четное число совместные.

События называют **единственно возможными**, если появление в результате испытания одного и только одного из них является достоверным событием.

Пример. Стрелок произвел выстрел по цели. События: А – попадание в цель, В – промах единственно возможные в данном испытании.

События называют **равновозможными**, если есть основание считать, что ни одно из этих событий не является более возможным, чем другие.

Пример. Брошена игральная кость. Равновозможные события: А – выпала 3 и В – выпала 5; или С – выпало четное число и Д – выпало нечетное число очков.

Совокупность всех единственно возможных событий испытания называют **полная группа событий**.

Пример 1. Стрелок произвел 2 выстрела.

Полная группа событий: $\{A_1, A_2, A_3\}$; где

Событие A_1 - промах;

Событие A_2 - одно попадание;

Событие A_3 - два попадания;

Пример 2. Так, выпадение 1,2,3,4,5,6 очков при бросании игральной кости есть полная группа событий, поскольку все эти события несовместны и наступление хотя бы одного из них обязательно.

*Пример 3.*Приобретены 2 билета денежно-вещевой лотереи. Обязательно произойдет одно и только одно из следующих событий:

– выиграл 1-й билет, 2-й билет не выиграл;

– выиграл 2-й билет, 1-й билет не выиграл;

– выигрыш выпал на оба билета;

– на оба билета выигрыш не выпал.

Эти события образуют *полную группу попарно-несовместных* событий.

Противоположными называют *два* единственно возможных события образующих полную группу событий.

Обозначение: A и $\overline{A}$;

Пример. Монета брошена 1 раз. События: A – выпал герб и $\overline{A}$ – выпала решка противоположные.

Брошена игральная кость. События: A - выпало четное число очков и $\overline{A}$ - выпало нечетное число очков противоположные.

События: A - выпала 1 и $\overline{A}$ - не выпала 1 противоположные.

Операции над событиями

Суммой конечного числа событий называют новое событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них.

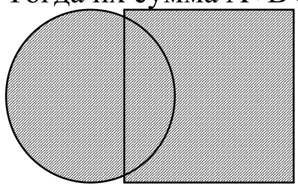
(**Суммой** событий A и B называют событие состоящее в появлении **или** события A **или** события B, или обоих событий.);

Логический принцип: **или – или**.

Обозначение: A+B

Пример. Событие A – попадание в круг, а событие B – попадание в квадрат;

Тогда их сумма A+B заключается в попадании или в круг или в квадрат



Произведением конечного числа событий называют новое событие, состоящее в том, что произойдут все эти события.

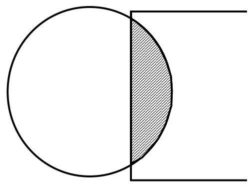
(**Произведением** двух событий A и B называют событие, состоящее **и** в появлении события A **и** в появлении события B).

Логический принцип **и – и**.

Обозначение: AB

Пример. Событие A – попадание в круг, а событие B – попадание в квадрат;

Тогда их произведение AB заключается в попадании в общую часть круга и квадрата.



Классическое определение вероятности

Вероятность является одним из основных понятий теории вероятностей. Существует несколько определений этого понятия. Рассмотрим определение, которое называют классическим.

Каждый из возможных результатов испытания, т.е. каждое событие, которое может наступить в испытании, назовем элементарным исходом.

Те элементарные исходы, при которых интересующее нас событие наступает, назовем благоприятствующими этому событию.

Вероятностью события A называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к общему числу всех единственно возможных и равновозможных исходов испытания.

$$P(A)=\frac{m}{n} \qquad (1);$$

где m – число элементарных исходов, благоприятствующих событию A;

n – число всех возможных элементарных исходов испытания.

Вероятность есть число, характеризующее возможность появления события.

Пример 1. В урне содержится 6 одинаковых, тщательно перемешанных шаров, причем 2 из них – красные, 3 – синие и 1 – белый. Из урны наудачу вынимают один шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар: а) красный; б) синий; в) белый?

Решение. а) Пусть событие A – извлекли красный шар.

Число благоприятствующих событию A исходов, $m = 2$ (т.к. в урне 2 красных шара);

Число возможных исходов n=6 (т.к. всего 6 шаров);

$$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};$$

б) Пусть событие B – извлекли синий шар:

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};$$

в) Пусть событие C – извлекли белый шар:

$$P(C) = \frac{1}{6};$$

Пример 2. Брошена игральная кость. Найти вероятность того, что на верхней грани появится:

а) число « 2 »; б) четное число; в) число « 7 »; г) не более $6^{\underline{и}}$ очков.

Решение. При бросании игральной кости на верхней грани может появится одна из следующих цифр $\{1,2,3,4,5,6\}$

а) Пусть событие A – на верхней грани появится число « 2 ».

Число благоприятствующих событию A исходов, $m = 1$ (выпадет 2);

Число возможных исходов n=6 (т.к. всего 6 разных цифр);

$$P(A) = \frac{1}{6};$$

б) Пусть событие B – на верхней грани появится четное число.

Число благоприятствующих событию B исходов, $m = 3$ (выпадет $2,4,6$);

Число возможных исходов n=6.

$$P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2};$$

в) Пусть событие C – на верхней грани появится число « 7 ».

Число благоприятствующих событию C исходов, $m = 0$ (т.к. 7 не выпадет);

$$P(C) = \frac{0}{6} = 0.$$

г) Пусть событие D – на верхней грани появится не более $6^{\underline{и}}$ очков.

Число благоприятствующих событию D исходов, $m = 6$ (т.к. любое выпавшее число не превышает 6);

$$P(D) = \frac{6}{6} = 1.$$

Свойства:

1. Вероятность достоверного события равна единице;
2. Вероятность невозможного события равна нулю;
3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей $0 \le P(A) \le 1$;

Статистическое определение вероятности.

Существует обширный класс событий, вероятности которых нельзя вычислить по формуле (1).

Пример: Если рассмотреть неправильно выполненную, несимметричную игральную кость. Выпадение определенной грани уже не будет характеризоваться вероятностью $1/6$. Но можно вычислить относительную частоту этого события при многократном воспроизведении данного комплекса условий.

Если произведена серия из n опытов, в каждом из которых могло появиться или не появиться некоторое событие A, то *частотой события* A в данной серии опытов называется отношение числа опытов, в которых появилось событие A, к общему числу произведенных опытов.

Определение: Частоту события часто называют его *статистической вероятностью*

$$P^*(A) = \frac{m}{n}, \qquad (2)$$

где m – число появлений события A;

n – общее число произведенных опытов.

Пример 1: С попаданием в мишень из 100 выстрелов ($\frac{80}{10} \approx \frac{79}{100} \approx \frac{81}{100} \approx \frac{78}{100} \approx \ldots \approx p_1$).

Пример 2: Если взять относительную частоту появления суток с двумя вызовами в течение месяца и сравнить эти частоты по месяцам за год, то может оказаться, что эти числа весьма близки друг к другу:

$$\frac{n_2}{31} \approx \frac{n_2}{28} \approx \ldots \approx \frac{n_2}{30} \approx \frac{n_2}{31} \approx \ldots \approx p_2.$$

Наряду с вероятностью, к основным понятиям теории вероятностей относится *относительная частота*.

Относительной частотой событии называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний.

$$W(A) = \frac{m}{n},$$

где m – число появления события;

n – общее число испытаний.

Вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту – после опыта.

Пример. По цели произвели 24 выстрела, причем было зарегистрировано 19 попаданий. Относительная частота поражения цели $W(A) = \frac{19}{24}$.

Геометрическая вероятность

Геометрическое определение вероятности появилось, благодаря попытке отказаться от конечности m и n.

Пусть на плоскости имеется некоторая область G и в ней содержится другая область g. Требуется найти вероятность того, что точка, взятая наудачу в области G, попадет в область g.

При этом выражению «точка, взятая наудачу в области G» придается следующий смысл: эта точка может попасть в любую точку области G.

Вероятность попадания точки в какую либо область G пропорциональна мере (mes) этой части (длине, площади, объему и т.д.) и не зависит от ее расположения и формы:

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = \frac{\mathrm{mesg}}{\mathrm{mesG}};$$

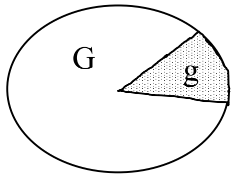
(геометрическое определение вероятности).

Пример. Круглый диск радиуса R разбит на два сектора. Длина дуги одного из них (заштрихованного) равна радиусу R. По быстро вращающемуся диску произведен выстрел. Найти вероятность попадания в этот сектор.

Решение.

Событие A – попадание в сектор.

В данном случае, в качестве меры выступает площадь;



$P(A) = \frac{S_g}{S_G}$, где S_G - площадь круга; S_g - площадь сектора.

$S_G = \pi R^2$;

площадь кругового сектора соответствующего центральному углу в α радиан: $S = \frac{R^2\alpha}{2}$;

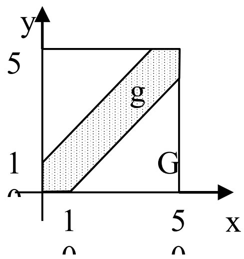
длина дуги, соответствующей центральному углу в α радиан: $l = R\alpha$;

По условию: $l = R \Rightarrow \alpha = 1$ рад.

$S_g = \frac{R^2}{2}$.

Т.о. $$P(A) = \frac{\frac{R^2}{2}}{\pi R^2} = \frac{1}{2\pi}.$$

Пример. (задача о встрече). Два студента A и B условились встретится в определенном месте во время перерыва между 13ч и 13ч 50мин. Пришедший первым ждет другого в течение 10 мин, после чего уходит. Чему равна вероятность их встречи, если приход каждого из них в течение указанных 50мин. может произойти наудачу и моменты прихода неизвестны.



Решение. Обозначим момент прихода студента A через x, а студента B через y.

Для того чтобы они встретились, необходимо и достаточно, чтобы $|x - y| \le 10$.

Изобразим x и y как декартовы координаты на плоскости, а в качестве масштаба выберем 1 минуту.

Всевозможные исходы изобразятся точками квадрата со стороной 50:

$$\text{mes}G = S_G = 50^2 = 2500;$$

Исходы, благоприятствующие встрече, - точками заштрихованной области.

$$\text{mes}g = S_g = 50^2 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 40^2 = 900;$$

Откуда

$$P(A) = \frac{\text{mes}g}{\text{mes}G} = \frac{900}{2500} = 0{,}36.$$

Аксиомы теории вероятностей

Аксиома 1.

Каждому событию A соответствует определенное число $P(A)$, удовлетворяющее условию $0 \le P(A) \le 1$, и называемое его вероятностью.

Аксиома 2.

Вероятность достоверного события U равна единице.

Аксиома 3.

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме их вероятностей.

Аксиома 3^*.

Вероятность суммы конечного или бесконечного множества несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Элементы комбинаторики

Формулы комбинаторики составляют теоретическую базу при использовании классического определения вероятности, которое в прикладных задачах играет большую роль.

В зависимости от правил составления можно выделить три типа комбинаций:

- Перестановки;
- Размещения;
- Сочетания;

I. Перестановки.

Комбинации из **n** элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называют **перестановками**.

Обозначаются символом P_n;

$$P_n = n!;$$

Пример. В соревновании участвовало 4 команды, сколько существует вариантов распределить места между ними.

Решение. Количество вариантов распределения четырех команд по местам – равно числу перестановок из четырех элементов: $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Пример. В ящике пять одинаковых пронумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики из ящика. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.

Решение. Обозначим A событие, состоящее в том, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.

Благоприятствует событию A только один исход, $m = 1$(из всех возможных комбинаций номеров только одна с порядком возрастания номеров).

Общее число возможных исходов – количество комбинаций из 5 номеров, $n = P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

Искомая вероятность: $P(A) = \dfrac{m}{n} = \dfrac{1}{5!} = \dfrac{1}{120}$.

Размещения

Комбинации из **n** элементов по **k** элементов, которые отличаются друг от друга или самими элементами, или порядком элементов называют **размещениями**.

Обозначаются символом A_n^k

n - количество всех имеющихся элементов;

k – количество элементов в каждой комбинации; $(k \le n)$.

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!};$$

Пример. Сколько существует вариантов размещения 3^x призовых мест, если в розыгрыше участвуют 7 команд?

Решение. Необходимо просчитать число возможных комбинаций извлеченных из 7 элементов и включающих по 3 элемента (причем {I–«Таврия», II–«Динамо», III–«Спартак»} и {I–«Динамо», II–«Таврия», III–«Спартак»}– различные комбинации). Используем число размещений из 7 элементов по 3:

$$A_7^3 = \frac{7!}{4!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{4!} = 210.$$

Пример. Из пяти карточек с буквами О, П, Р, С, Т наугад одну за другой выбирают три и располагают в ряд в порядке появления. Какова вероятность того, что получится слово «ТОР»?

Решение. Обозначим A событие, состоящее в том, что получится слово «ТОР».

Благоприятствует событию A только один исход, $m = 1$ (комбинация букв «ТОР»).

Общее число возможных исходов – равно числу способов, которыми можно отобрать 3 карточки из имеющихся 5, получая при этом комбинации букв отличающиеся либо самими буквами (СОР – ТОР), либо их порядком (РОТ – ОРТ). Оно определяется числом размещений из 5 элементов по 3:

$$n = A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{2!\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{2!} = 3\cdot 4\cdot 5 = 60.$$

Искомая вероятность:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_5^3} = \frac{1}{60}.$$

Сочетания

Сочетаниями называют все возможные комбинации из **n** элементов по **k** элементов, которые отличаются друг от друга по крайней мере хотя бы одним элементом.

Обозначаются символом C_n^k

n - количество всех имеющихся элементов;

k – количество элементов в каждой комбинации; $(k \le n)$.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!};$$

Пример. Сколькими способами можно выбрать 3 студентов, из группы численностью 30 человек.

Решение. Необходимо просчитать число возможных комбинаций извлеченных из 30 элементов и включающих по 3 элемента (причем комбинации: {Пархоменко, Сергиенко, Божок} и {Сергиенко, Божок, Пархоменко}– одинаковые комбинации). Используем число размещений из 30 элементов по 3:

$$C_{30}^3 = \frac{30!}{3!\cdot(30-3)!} = \frac{30!}{3!\cdot 27!} = \frac{27!\cdot 28\cdot 29\cdot 30}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 27!} = 4060.$$

Пример. В урне 5 белых и 4 красных шара. Из урны наудачу извлекают 3 шара. Найти вероятность того, что извлеченные шары – белые.

Решение. Обозначим A событие, состоящее в том, что все 3 шара будут белыми.

Всего в урне $5 + 4 = 9$ шаров.

Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 3 шара из 9:

$$n = C_9^3 = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3!\cdot 6!} = \frac{6!\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 6!} = 84.$$

Число исходов благоприятствующих событию A равно числу способов, которыми можно отобрать 3 белых шара из имеющихся 5 белых:

$$m = C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!\cdot 1\cdot 2} = 10.$$

Искомая вероятность равна:

$$P(A) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}.$$

Пример. В ящике имеется 11 одинаковых шаров. Причем 4 из них окрашены в синий цвет, а остальные белые. Наудачу извлекают 5 шаров. Найти вероятность того, что среди них 2 синих.

Решение. Обозначим A событие, состоящее в том, что среди извлеченных 5 шаров 2 синих.

Обще число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 5 шаров из 11, т.е.

$$n = C_{11}^{5} = \frac{11!}{5! \cdot (11-5)!} = \frac{11!}{5! \cdot 6!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6!} = 462.$$

Подсчитаем число исходов, благоприятствующих событию A: 2 синих шара можно взять из 4 имеющихся синих шаров C_4^2 способами; при этом остальные $5-2=3$ шара должны быть белыми, взять же 3 белых шара из имеющихся 7 можно C_7^3 способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно:

$$m = C_4^2 \cdot C_7^3 = \frac{4!}{2! \cdot (4-2)!} \cdot \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = \frac{4!}{2 \cdot 2} \cdot \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{4 \cdot 3!} = 210.$$

Искомая вероятность:

$$P(A) = \frac{C_4^2 \cdot C_7^3}{C_{11}^5} = \frac{210}{462} = \frac{35}{77}.$$

В общем случае, для решения задач типа: В партии из N деталей имеется n стандартных. Наудачу отобраны m деталей. Найти вероятность того, что среди отобранных деталей ровно k стандартных. Можно использовать формулу:

$$p = \frac{C_n^k \cdot C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m}.$$

Существует своеобразная «алгебра» событий, т.е. над событиями можно осуществлять некоторые алгебраические операции.

Определение: *Суммой двух событий* A и B называют событие $C = A + B$. Состоящее в выполнении события A или B.

Примеры:

1. A – попадание в цель при первом выстреле;
B – попадание в цель при втором выстреле;
$C = A + B$ – попадание в цель или при первом или при втором выстреле.

2. A – первый извещатель сработал;
B – второй извещатель сработал;
$C = A + B$ – сработал хотя бы один извещатель (или первый или второй).

Таким образом, *суммой двух событий* A и B называется событие C. Состоящее в появлении хотя бы одного из событий A и B.

Суммой нескольких событий называют событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.

Пример: Опыт состоит в пяти выстрелах по мишени и даны события:

A_0 – ни одного попадания

A_1 – ровно одно попадание

A_2 – ровно два попадания

A_3 – ровно три попадания

A_4 – ровно четыре попадания

A_5 – ровно пять попаданий

$A = A_0 + A_1 + A_2$ – есть событие «не более двух попаданий».

$B = A_3 + A_4 + A_5$ – есть событие «не менее трех попаданий».

Определение: *Произведением двух событий* A и B называют событие $C = A \cdot B$, состоящее в совместном выполнении события A и события B.

Примеры:

1. Производится два выстрела по мишени:

A – попадание при первом выстреле,

B – попадание при втором выстреле,

то событие $C = AB$ – есть попадание при обоих выстрелах.

2. Вынимание карты из колоды:

A – появление туза,

B – появление карты бубновой масти,

то $C = AB$ – есть появление бубнового туза.

Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном выполнении всех этих событий.

Пример: По мишени производится три выстрела и рассматриваются события

B_1 – промах при первом выстреле,

B_2 – промах при втором выстреле,

B_3 – промах при третьем выстреле,

то событие $B = B_1 B_2 B_3$ состоит в том, что в мишень не будет ни одного попадания.

Существуют две важные для теории вероятностей и ее приложений теоремы. Которым подчиняются вероятности случайных событий. Рассмотрим эти теоремы.

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема сложения вероятностей несовместных событий.

Если случайные события A и B *несовместны* (т.е. не могут произойти вместе), то вероятность того, что произойдет событие A или B (т.е. осуществится сумма событий $A + B$), равна сумме вероятностей событий, т.е.

$$P(A+B) = P(\text{или } A, \text{или } B) = P(A) + P(B).$$

Или Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Следствие 1: Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n).$$

Следствие 2: Сумма вероятностей событий, образующих полную группу событий равна единице.

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1,$$

где $\{A_1; A_2; ...; A_n\}$ – полная группа событий.

Следствие 3: Вероятность события, противоположного событию A, равна разности между единицей и вероятностью события A.

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Теорема сложения вероятностей совместных событий.

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Теорема может быть обобщена на любое конечное число совместных событий (например, для трех совместных событий):

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

Пример. Вероятность того, что стрелок при одном выстреле выбьет 10 очков, равна 0.2; вероятность выбить 9 очков, равна 0.4. Найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков.

Решение. Обозначим C событие, состоящее в том, что при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков. Событие C произойдет, если стрелок выбьет или 10 очков (событие A), или 9 очков (событие B), т.е. C – сумма событий A и B.

События A и B несовместные (попадание в 10, исключает попадание в 9 при одном выстреле, и наоборот), поэтому применима теорема сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B)=0.2+0.4=0.6.$$

Пример. В условиях предыдущего примера найти вероятность того, что при одном выстреле стрелок выбьет меньше 9 очков.

Решение. Событие $\overline{C}$ – при одном выстреле стрелок выбьет меньше 9 очков, является противоположным событию C (при одном выстреле стрелок выбьет не менее 9 очков). Следовательно:

$$P(\overline{C})=1-P(C)=1-0.6=0.4.$$

Пример. Игральную кость подбросили один раз. Найти вероятность следующего события: на верхней грани появится либо четное число, либо число кратное трем.

Решение. Обозначим C событие, состоящее в том, что появится либо четное число, либо число кратное трем. Событие C произойдет, если при бросании появится или четное число (событие A), или число кратное трем (событие B), т.е. C – сумма событий A и B.

$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$; (т.к. общих исходов $n=6$, благоприятствующих A исходов $m=3$ $\{2;4;6\}$).

$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$; ($m=2$ $\{3;6\}$).

События A и B совместные (при появлении «6» появится и четное число, и кратное трем). Поэтому применяем теорему сложения вероятностей совместных событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

Пример: Бросаются две монеты. Рассматриваются события:

A – выпадение герба на первой монете;

B – выпадение герба на второй монете.

Найти вероятность события $C=A+B$.

Решение: $P(C)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$

Два события называют **независимыми**, если вероятность одного из них не зависит от появления или непоявления другого.

Пример. игральная кость брошена два раза. Вероятность появления «5» при втором бросании (событие B) не зависит от появления «5» при первом бросании (событие A).

События A и B – независимые.

Пример. В ящике 6 красных и 4 белых шара. Из ящика наудачу берут один шар. Очевидно, вероятность появления красного шара (событие A) равна $\frac{6}{10}$. Взятый шар возвращают в ящик и испытание повторяют. Вероятность появления красного шара при втором испытании (событие B), по прежнему равна $\frac{6}{10}$ и не зависит от результата первого испытания. Т.о. события A и B – независимые.

Несколько событий называют **попарно независимыми**, если каждые два из них независимы.

Несколько событий называют **независимыми в совокупности**, если вероятность каждого из них не меняется при наступлении других событий.

Два события называют **зависимыми**, если вероятность появления одного из них зависит от наступления или ненаступления другого события.

Пример. В ящике 6 красных и 4 белых шара. Наудачу берут один шар, не возвращая его в ящик. Если появился красный шар (событие A), то вероятность извлечения красного шара при втором испытании (событие B) $P(B)=\frac{5}{9}$; если же в первом испытании вынут белый шар, то вероятность $P(B)=\frac{6}{9}$.

Т.о. вероятность появления события B зависит от наступления или ненаступления события A. События A и B – зависимые.

Теорема умножения вероятностей независимых событий.

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B).$$

Следствие: Вероятность появления нескольких событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий.

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n).$$

Пример. Имеется три ящика в каждом из которых по 10 шаров. В первом ящике 6 красных шаров, во втором – 7, в третьем – 9 красных шаров. Из каждого ящика наудачу вынимают по одному шару. Найти вероятность того, что все три вынутые шара окажутся красными.

Решение. Обозначим D событие, состоящее в том, что все три вынутые шара окажутся красными. Событие D произойдет если и из I ящика извлекут красный шар (событие A), и из II – красный (событие B), и из III – красный (событие C), т.е. D – произведение событий A; B и C.

Вероятность того, что из I ящика взят красный шар:

$$P(A)=\frac{6}{10}=0.6.$$

Вероятность того, что из II ящика взят красный шар:

$$P(B)=\frac{7}{10}=0.7.$$

Вероятность того, что из III ящика взят красный шар:

$$P(C)=\frac{9}{10}=0.9.$$

Т.к. события A; B и C независимые в совокупности, то искомая вероятность:

$$P(A\cdot B\cdot C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=0.6\cdot 0.7\cdot 0.9=0.378.$$

Пример. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка $p_1 = 0.7$, для второго стрелка $p_2 = 0.8$. Каждый стрелок произвел по одному выстрелу. Найти вероятности следующих событий:

1) Оба стрелка попадут в цель;
2) Оба стрелка промахнуться;
3) Только один стрелок попадет в цель;
4) Хотя бы один попадет в цель.

Решение. 1) Обозначим A событие, состоящее в том, что оба стрелка попадут в цель. Событие A произойдет, если и первый стрелок попадет в цель, и второй попадет.

Используем теорему умножения вероятностей независимых событий:

$P(A) = p_1 \cdot p_2 = 0.7 \cdot 0.8 = 0.56$.

2) Обозначим B событие, состоящее в том, что оба стрелка промахнуться. Событие B произойдет, если и первый стрелок промахнется, и второй промахнется.

Вероятность промаха для первого стрелка $q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0.7 = 0.3$.

Вероятность промаха для второго стрелка $q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0.8 = 0.2$.

Искомая вероятность:

$P(B) = q_1 \cdot q_2 = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06$.

3) Обозначим C событие, состоящее в том, что только один стрелок попадет в цель. Событие C произойдет, если: (первый стрелок попадет в цель и второй промахнется) или (первый стрелок промахнется в цель и второй попадет).

Искомая вероятность:

$P(C) = p_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot p_2 = 0.7 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.8 = 0.14 + 0.24 = 0.38$.

4) Событие, хотя бы один стрелок попадет в цель, является противоположным событию B – оба промахнутся:

$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0.06 = 0.94$.

Пусть события A и B зависимые.

Определение: События A и B называются *зависимыми*, если вероятность одного из них зависит от того, наступило или нет другое событие.

$P(A/B)$ – *условная вероятность*, т.е. вероятность события A, вычисленная в предположении, что событие B произошло.

$P(B/A)$ – *условная вероятность*, т.е. вероятность события B, вычисленная в предположении, что событие A произошло.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило.

Теорема умножения вероятностей зависимых событий.

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго:

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B)$

$P(A \cdot B) = P(B) \cdot P_B(A)$.

Следствие: Вероятность совместного появления нескольких зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятности каждого последующего события вычисляются в предположении, что все предыдущие события уже появились.

$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n)$.

где $P_{A_1 A_2 \ldots A_{n-1}}(A_n)$ – вероятность события A_n, вычисленная в предположении, что события A_1, A_2, …, A_{n-1} наступили.

Пример. В ящике 15 шаров: 7 синих и 8 желтых. Наудачу из ящика вынули один шар, а затем второй (не возвращая их обратно). Найти вероятность того, что первый из взятых шаров синий, а второй желтый.

Решение. Событие A – первый взятый шар синий. Вероятность события A: $P(A) = \frac{7}{15}$

.

Событие B – второй взятый шар желтый. Вероятность события B, вычисленная в предположении, что первый шар синий (т.е. условная вероятность) равна: $P_A(B) = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$.

Искомая вероятность по теореме умножения вероятностей зависимых событий равна:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{7}{15} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{15}.$$

Формула полной вероятности. Формула Бейеса

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, …, B_n, которые образуют полную группу. Пусть известны вероятности этих событий и условные вероятности $P_{B_1}(A)$, $P_{B_2}(A)$, …, $P_{B_n}(A)$ события A. В поставленных условиях вероятность события A можно найти по формуле:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + ... + P(B_n) \cdot P_{B_n}(A)$$

формулу называют **формулой полной вероятности**;

события B_1, B_2, …, B_n называют **гипотезами**.

Пример 1. На контроль поступают детали с двух станков. Производительность станков не одинакова. На первом станке изготовляют 60% всех деталей, на втором – 40% . Вероятность брака на первом станке 0.02 , на втором – 0.04 . Найти вероятность того, что поступившая на контроль деталь бракованная.

Решение. Событие A – поступившая на контроль деталь бракованная.

B_1 и B_2 – события означающие, что деталь сделана соответственно на первом и втором станке.

Тогда по условию задачи:

$$P(B_1) = \frac{60}{100} = 0.6 \qquad P(B_2) = \frac{40}{100} = 0.4$$

$$P_{B_1}(A) = 0.02 \qquad P_{B_2}(A) = 0.04.$$

Искомая вероятность:

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = 0.6 \cdot 0.02 + 0.4 \cdot 0.04 = 0.028.$$

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) B_1, B_2, …, B_n, которые образуют полную группу. Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по формулам Бейеса:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)} \qquad (i = 1,2,...,n),$$

где $P(A)$ – находят по формуле полной вероятности.

Пример 2. В условиях примера 1, проверенная деталь оказалась бракованной. Определить вероятность того, что она была изготовлена на первом станке.

Решение. Искомая вероятность $P_A(B_1)$–вероятность, что деталь изготовлена на первом станке, при условии что уже известно, что деталь бракованная.

По формуле Бейеса:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

Из примера 1: $P(B_1) = \frac{60}{100} = 0.6$; $P(B_2) = \frac{40}{100} = 0.4$; $P(A) = 0.028$.

Искомая вероятность:

$$P_A(B_1) = \frac{0.6\cdot 0.02}{0.028} \approx 0.43.$$