ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

АКТУАЛЬНОСТЬ

***РОЛЬ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ*:**

- **ПОЗВОЛЯЕТ ЛУЧШЕ ОРИЕНТИРОВАТЬСЯ В ОКРУЖАЮЩЕМ МИРЕ, ГДЕ НЕ ВСЕ ЖЕСТКО ДЕТЕРМИНИРОВАНО;**
- **ЯВЛЯЕТСЯ ОСНОВОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ.**

***РОЛЬ МАТЕМАТИЧЕС-КОЙ СТАТИСТИКИ*:**

- **НУЖНА ДЛЯ СИСТЕ-МАТИЗАЦИИ И ОЦЕНКИ ЭКСПЕРИ-МЕНТАЛЬНЫХ ДАН-НЫХ В ПРОЦЕССЕ РЕШЕНИЯ НАУЧНЫХ И ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ**
- **ЛЕЖИТ В ОСНОВЕ МЕДИЦИНСКОЙ СТАТИСТИКИ**

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Лекция 1.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. ВИДЫ СОБЫТИЙ.
2. КОМБИНАЦИИ СОБЫТИЙ.
3. ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТИ.
4. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.
5. ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

1. ВИДЫ СОБЫТИЙ

ВСЕ СОБЫТИЯ
В ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
ПРИНЯТО ОБОЗНАЧАТЬ
ЗАГЛАВНЫМИ БУКВАМИ
ЛАТИНСКОГО АЛФАВИТА: A, B, C, …

ТЕОРИЯ
ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОПЕРИРУЕТ
СЛУЧАЙНЫМИ СОБЫТИЯМИ.

СЛУЧАЙНОЕ –

СОБЫТИЕ, КОТОРОЕ
В ДАННОМ ИСПЫТАНИИ МОЖЕТ ПРОИЗОЙТИ,
А МОЖЕТ И НЕ ПРОИЗОЙТИ.

Примеры:

- падение монеты определенной стороной вверх;
- выпадение определенного числа очков на кубике для настольной игры.

Статистические закономерности

НО И СЛУЧАЙНОЕ СОБЫТИЕ ИМЕЕТ ПРИЧИНУ.

Так, при бросании монеты имеют значение поворот руки, сопротивление воздуха и его движение и т.п.

И В МИРЕ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ СУЩЕСТВУЮТ ЗАКОНОМЕРНОСТИ.

ОДНАКО ПРОЯВЛЯЮТСЯ ОНИ

ЛИШЬ <u>ПРИ БОЛЬШОМ ЧИСЛЕ ИСПЫТАНИЙ</u>.

ТАКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ НАЗЫВАЮТСЯ

***СТАТИСТИЧЕСКИМИ*.**

Так, статистическим является основной закон радиоактивного распада.

МНОЖЕСТВО
СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ
КАК БЫ ОГРАНИЧЕНО
С ДВУХ СТОРОН
СОБЫТИЯМИ

НЕВОЗМОЖНЫМИ
И
ДОСТОВЕРНЫМИ.

НЕВОЗМОЖНОЕ – СОБЫТИЕ, КОТОРОЕ В ДАННОМ ИСПЫТАНИИ <u>НЕ МОЖЕТ</u> ПРОИЗОЙТИ.

Например, если на гранях кубика число очков от 1 до 6, то выпадение семи очков при единичном бросании кубика – невозможное событие.

ДОСТОВЕРНОЕ –

СОБЫТИЕ, КОТОРОЕ В ДАННОМ ИСПЫТАНИИ ОБЯЗАТЕЛЬНО ПРОИЗОЙДЕТ

(НЕ МОЖЕТ НЕ ПРОИЗОЙТИ).

- Например, если в некоторой корзине (часто говорят "в урне") имеются ТОЛЬКО КРАСНЫЕ ШАРЫ, ТО ВЫТАСКИВАНИЕ ИЗ НЕЕ ИМЕННО КРАСНОГО ШАРА – событие ДОСТОВЕРНОЕ.
- В то же время вытаскивание черного шара – событие невозможное.

Среди НЕСКОЛЬКИХ случайных событий могут быть события

- ***РАВНОВОЗМОЖНЫЕ,***
- ***НЕСОВМЕСТНЫЕ,***
- ***ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ***

События могут составлять

ПОЛНУЮ ГРУППУ (СИСТЕМУ).

<u>Диаграммы Венна</u>

Удобно представлять события в виде геометрических образов на плоскости.

В дальнейшем мы будем пользоваться этим способом.

Равновозможные события

События называются **равновозможными**,

если не существует причин,

в силу которых одно из них происходило бы чаще других.

Пример

В урне 2 КРАСНЫХ

и 2 ЧЕРНЫХ шара.

Тогда

ВЫТАСКИВАНИЕ КРАСНОГО ШАРА

и ВЫТАСКИВАНИЕ ЧЕРНОГО ШАРА – события РАВНОВОЗМОЖНЫЕ.

Несовместные события

События называются **несовместными**,

если появление одного из них в данном испытании

исключает появление других <u>в том же испытании</u>.

<u>Пример</u>

Имеется урна с красными и черными шарами.

Предполагается, что в руке помещается только один шар.

Тогда ПОЯВЛЕНИЕ при ЕДИНИЧНОМ вытаскивании

одновременно

КРАСНОГО ШАРА и ЧЕРНОГО ШАРА –

события НЕСОВМЕСТНЫЕ.

Противоположные события

Два события называются **противоположными**,

если одно из них заключается в том, что другое

не происходит.

ОБОЗНАЧЕНИЕ:

A и $\overline{A}$

(*читается* "А" и "НЕ А").

Пример

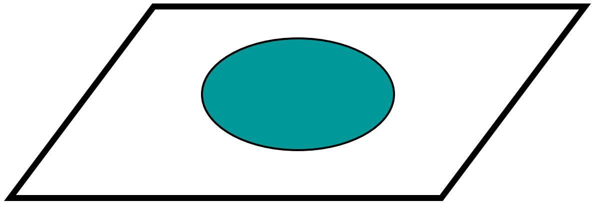
Выпадение орла и выпадение решки

при единичном бросании монеты –

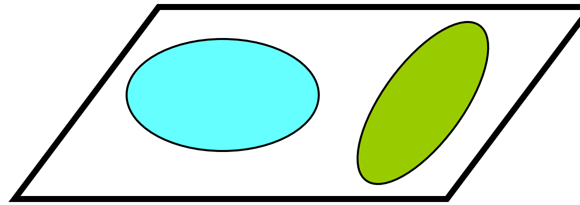
противоположные события

(*если исключить возможность установки монеты на ребро*).

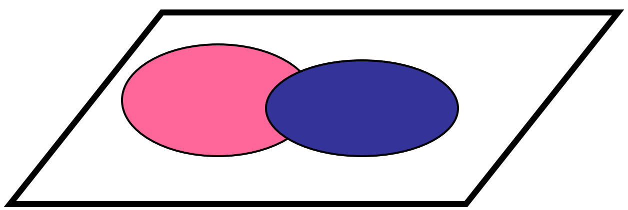
События на диаграммах Венна



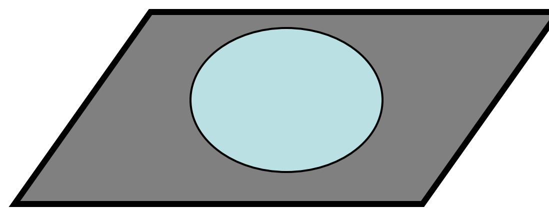
Любое случайное событие



Два несовместных события (геом. образы не имеют пересечения)



Два совместных (геом. образы имеют общую часть, или *пересечение*)



Два противоположных события (голубое – А, серое – «не А»)

**** ЛЮБЫЕ ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ СОБЫТИЯ НЕСОВМЕСТНЫ.***

**** ОДНАКО НЕ ВСЯКИЕ НЕСОВМЕСТНЫЕ СОБЫТИЯ ПРОТИВОПОЛОЖНЫ.***

<u>Пример</u>

Пусть в корзине имеются красные, черные и белые шары. Обозначим А – вытаскивание из нее белого шара.

Тогда $\overline{A}$ – вытаскивание <u>небелого</u> шара (т.е. либо красного, либо черного - учитываются обе возможности). Это – противоположное событие

Несовместных с А событий – 2:

вытаскивание красного шара и

вытаскивание черного шара.

Однако ни одно из них само по себе не является противоположным А.

Запомните:

ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ СОБЫТИЯ ВМЕСТЕ ОХВАТЫВАЮТ ВСЕ ВОЗМОЖНЫЕ ИСХОДЫ ИСПЫТАНИЯ.

Полная группа событий

СОБЫТИЯ СОСТАВЛЯЮТ ***ПОЛНУЮ ГРУППУ*** **(*СИСТЕМУ*),**

ЕСЛИ ОНИ <u>ПОПАРНО НЕСОВМЕСТНЫ</u>

И

<u>ХОТЯ БЫ ОДНО ИЗ НИХ ОБЯЗАТЕЛЬНО ПРОИЗОЙДЕТ</u>.

Так, вытаскивание

- **белого,**
- **красного и**
- **черного**

шаров из корзины в предыдущем примере –

3 события, составляющие полную группу.

ПРОТИВОПОЛОЖНЫЕ СОБЫТИЯ ВСЕГДА СОСТАВЛЯЮТ ПОЛНУЮ ГРУППУ.

2. КОМБИНАЦИИ СОБЫТИЙ

РАССМОТРИМ ДВЕ КОМБИНАЦИИ СОБЫТИЙ:

СУММУ

И

ПРОИЗВЕДЕНИЕ.

ОБОЗНАЧЕНИЕ этих комбинаций
ДЛЯ ДВУХ СОБЫТИЙ,
СОБЫТИЯ А И СОБЫТИЯ В **:**
сумма – «А + В»,
произведение – «А · В».

Сумма событий

СУММА СОБЫТИЙ –

это событие, состоящее в том,

что происходит

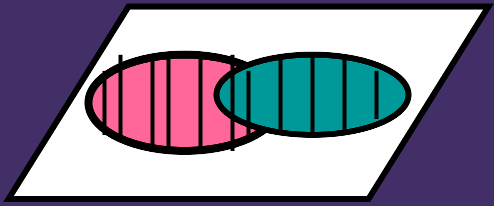
ИЛИ А, ИЛИ В, ИЛИ ОНИ ОБА ВМЕСТЕ.

ИНАЧЕ:

ЕСЛИ ПРОИСХОДИТ <u>ХОТЯ БЫ</u> ОДНО ИЗ НИХ.

*СОЮЗЫ "**ИЛИ**", "**ХОТЯ БЫ**" – УКАЗАНИЕ НА <u>СУММУ</u> СОБЫТИЙ.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ СУММА – ЭТО ***ОБЪЕДИНЕНИЕ***:



Произведение событий

ПРОИЗВЕДЕНИЕ СОБЫТИЙ –

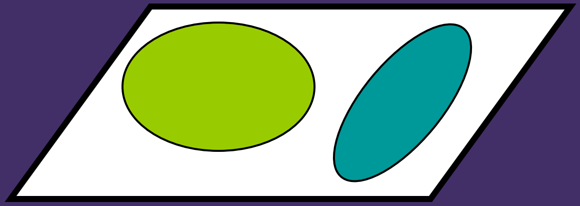
это событие, состоящее в том,

что происходит И А, И В,

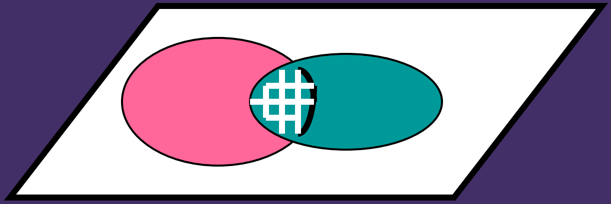
Т.Е. ОНИ ПОЯВЛЯЮТСЯ ОБА, СОВМЕСТНО.

СОЮЗ "И" – УКАЗАНИЕ НА ПРОИЗВЕДЕНИЕ СОБЫТИЙ.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИ ПРОИЗВЕДЕНИЕ – ЭТО *ПЕРЕСЕЧЕНИЕ*.



Несовместные события



Совместные события

- Геометрические образы НЕСОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ НЕ ИМЕЮТ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ.

  Следовательно,

- ***ПРОИЗВЕДЕНИЕ НЕСОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ ЕСТЬ СОБЫТИЕ НЕВОЗМОЖНОЕ.***

3. ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

ВЕРОЯТНОСТЬ ЕСТЬ КОЛИЧЕСТВЕННАЯ МЕРА ВОЗМОЖНОСТИ СОБЫТИЯ.

Существует несколько определений вероятности.

Чаще всего используются *КЛАССИЧЕСКОЕ и СТАТИСТИЧЕСКОЕ определения*.

Предварительные пояснения

<u>*Испытание*</u> – совокупность некоторых действий при определенных условиях, в результате которых происходит данное событие.

Например, <u>испытанием</u> является подбрасывание монеты, если мы обговорим заранее, что монету следует положить на ладонь и упасть она должна на ровную, гладкую, твердую поверхность.

В результате этого испытания может произойти одно из двух событий – выпадение орла или решки.

Элементарный исход испытания –
результат испытания,
исключающий другие результаты.

Те элементарные
исходы, при которых
данное событие происходит,
называются
благоприятствующими ему.

Пусть в корзине имеется
2 красных и 3 белых шара.
Шары имеют один размер
и одинаковую на ощупь
поверхность, так что
вытаскивание не глядя
любого из них - равновозможное с другими событие.
Пронумеруем условно эти шары – 1, 2, 3, 4, 5.
Вытаскивание шара под любым номером –
элементарные и равновозможные
исходы испытания, всего 5.
Из них два исхода будут благоприятствовать событию «вытаскивание красного шара».

Классическое определение вероятности

ВЕРОЯТНОСТЬЮ СОБЫТИЯ «А» НАЗЫВАЕТСЯ ОТНОШЕНИЕ ЧИСЛА* m *ЭЛЕМЕНТАРНЫХ БЛАГОПРИЯТСТВУ-ЮЩИХ «А» ИСХОДОВ ИСПЫТАНИЯ К ОБЩЕМУ ЧИСЛУ* n *ВСЕХ ВОЗМОЖНЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ИСХОДОВ ИСПЫТАНИЯ.

При этом элементарные исходы должны быть равновозможными.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

В предыдущем примере вероятность вытащить при единичном испыта-нии красный шар - 2/5, белый шар – 3/5.

Предварительные пояснения к статистическому определению вероятности

Пусть производится серия из n испытаний,

и в этой серии событие A происходит m раз.

Число m называется ***ЧАСТОТОЙ***,

а отношение m к n

$W(A) = m / n$ –

ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЧАСТОТОЙ

события А.

Если число испытаний в серии достаточно велико,

то относительную частоту

события можно считать его устойчивой характеристикой:

она почти не меняется

от серии к серии.

Например,

в серии из 10000 бросаний

монеты относительная

частота выпадения герба

составила 0,5021, а в серии

из 15000 бросаний – 0,5010.

Статистическое определение вероятности

ВЕРОЯТНОСТЬЮ СОБЫТИЯ А НАЗЫВАЕТСЯ

ПРЕДЕЛ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ЧАСТОТЫ ЭТОГО СОБЫТИЯ

ПРИ НЕОГРАНИЧЕННОМ УВЕЛИЧЕНИИ ЧИСЛА ИСПЫТАНИЙ:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

Если n достаточно велико, то

$$P(A) \approx \frac{m}{n}$$

Опытная вероятность

Найденная из такого приближенного равенства вероятность называется ***опытной***.

Именно она обычно определяется на практике.

Пример

Из 10000 человек, работающих на фабрике, 1000 страдает некоторым профессиональным заболеванием.

Тогда вероятность подвергнуться ему для работников фабрики составляет приблизительно

1000/10000 = 0,1, или 10%.

Следствия из определений вероятности

- ВЕРОЯТНОСТЬ НЕВОЗМОЖНОГО СОБЫТИЯ РАВНА НУЛЮ.

- ВЕРОЯТНОСТЬ ДОСТОВЕРНОГО СОБЫТИЯ РАВНА ЕДИНИЦЕ.

- ВЕРОЯТНОСТЬ ЛЮБОГО СЛУЧАЙ-НОГО СОБЫТИЯ МОЖЕТ ПРИНИМАТЬ ЗНАЧЕНИЯ ЛИШЬ В ИНТЕРВАЛЕ МЕЖДУ ЭТИМИ ЧИСЛАМИ:

$$0 \le P(A) \le 1.$$

- **РАВНОВОЗМОЖНЫЕ СОБЫТИЯ ЯВЛЯЮТСЯ И**
РАВНОВЕРОЯТНЫМИ.

Пример

Пусть в урне 2 белых,

2 красных и 2 черных шара.

Тогда изъятие первым

шара каждого из этих цветов –

равновозможные события,

и вероятность любого из

них составляет 2/6,

или 1/3.

4. ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ВЕРОЯТНОСТЬ СУММЫ ДВУХ СОБЫТИЙ РАВНА СУММЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ КАЖДОГО ИЗ НИХ БЕЗ ВЕРОЯТНОСТИ ИХ ПРОИЗВЕДЕНИЯ:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) – P(AB).$$

Это общий вид теоремы сложения, справедливый для любых событий.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий

ЕСЛИ СОБЫТИЯ НЕСОВМЕСТНЫ,

ТО ВЕРОЯТНОСТЬ

ИХ ПРОИЗВЕДЕНИЯ РАВНА НУЛЮ,

И ТЕОРЕМА СЛОЖЕНИЯ ПРИНИМАЕТ СЛЕДУЮЩИЙ ВИД:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

ЭТО <u>ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ</u> ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ

<u>ДЛЯ НЕСОВМЕСТНЫХ СОБЫТИЙ</u>.

Следствие из теоремы сложения для событий, составляющих полную группу

Пусть n событий A_i составляют полную группу.

В ЭТОМ СЛУЧАЕ

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

СУММА ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВСЕХ СОБЫТИЙ, СОСТАВЛЯЮЩИХ ПОЛНУЮ ГРУППУ, РАВНА ЕДИНИЦЕ.

В ЧАСТНОСТИ, ЭТО ВЕРНО ДЛЯ ПРОТИВОПОЛОЖНЫХ СОБЫТИЙ:

$$P(A) + P\left(\overline{A}\right) = 1$$

5. ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В ОБЩЕМ ВИДЕ
ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ СПРАВЕДЛИВА ДЛЯ ЛЮБЫХ,
В ТОМ ЧИСЛЕ *ЗАВИСИМЫХ*, СОБЫТИЙ.

СОБЫТИЕ В ЗАВИСИТ ОТ СОБЫТИЯ А, ЕСЛИ

ВЕРОЯТНОСТЬ В ЗАВИСИТ ОТ ТОГО, ПРОИЗОШЛО ЛИ А.

УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

МЕРОЙ ЗАВИСИМОСТИ В от А
СЛУЖИТ
УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ
СОБЫТИЯ В –
Р(В/А), т.е.

ВЕРОЯТНОСТЬ В ПРИ УСЛОВИИ, ЧТО А ПРОИЗОШЛО.

Пример

В корзине имеются 2 черных и 3 белых шара.

Шары поочередно вынимают из корзины, не возвращая назад.

Пусть событие А – вытаскивание первым черного шара,

событие В –

вытаскивание вторым белого шара.

Зависит ли событие В от А?

Для ответа на этот вопрос найдем сначала вероятность В при условии, что А произошло, т.е., первым был вытащен черный шар.

$$P(B/A)=\frac{3}{5-1}=\frac{3}{4}$$

Теперь найдем вероятность В при условии, что А не произошло, т.е. первым был вытащен белый шар:

$$P(B/\overline{A})=\frac{3-1}{5-1}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Сравним полученные вероятности:

$$P(B/A)\neq P(B/\overline{A})$$

Следовательно, событие В зависит от А.

Формулировка теоремы умножения вероятностей

ВЕРОЯТНОСТЬ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДВУХ СОБЫТИЙ РАВНА ПРОИЗВЕДЕНИЮ БЕЗУСЛОВНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ ОДНОГО НА УСЛОВНУЮ ВЕРОЯТНОСТЬ ДРУГОГО, ЗАВИСИМОГО ОТ ПЕРВОГО:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A).$$

Это общий вид теоремы умножения.

Теорема умножения вероятностей независимых событий

ЕСЛИ СОБЫТИЯ А и В НЕЗАВИСИМЫ,

ТО *УСЛОВНАЯ* ВЕРОЯТНОСТЬ КАЖДОГО ИЗ НИХ

РАВНА ЕГО ЖЕ *БЕЗУСЛОВНОЙ* ВЕРОЯТНОСТИ:

$$P(A/B) = P(A),$$

$$P(B/A) = P(B).$$

ТОГДА ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ

ПРИНИМАЕТ СЛЕДУЮЩИЙ ВИД:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

ЭТО

ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ

ТЕОРЕМЫ УМНОЖЕНИЯ

ДЛЯ НЕЗАВИСИМЫХ

СОБЫТИЙ.